JUEGOS CON COMPLEMENTARIEDADES ESTRATÉGICAS:

APLICACIONES A LA ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

XAVIER VIVES (*)

IESE Business School

Los juegos con complementariedades estratégicas son aquellos en los que la mejor respuesta de cualquier jugador es creciente en las acciones de los rivales. Muchos de los juegos que se estudian en organización industrial muestran complementariedades estratégicas, entre ellos un gran subconjunto de los que implican búsqueda, externalidades de red, interacción oligopolística, o carreras de patentes. Recientemente, ha aumentado el interés por el estudio de la competencia en presencia de complementariedades en las industrias con un componente de red tales como la de las tarjetas de crédito, o en las que la competencia de sistemas es importante, como en la industria de *software*.

Los juegos supermodulares (Topkis, 1979; Vives, 1985a, 1990; Milgrom y Roberts, 1990) proporcionan el marco adecuado para modelizar la interacción estratégica en presencia de complementariedades. La teoría de los juegos supermodulares se basa en el enfoque de la teoría de retículos (*lattice theory*), que aprovecha las propiedades de orden y monotonicidad. Tanto la existencia de equilibrio como las propiedades de estática comparativa se basan en las propiedades de orden y monotonicidad, a diferencia del conjunto habitual de herramientas basado en el análisis convexo y el cálculo.

El enfoque es potente y ofrece resultados sólidos. En los juegos supermodulares la existencia del equilibrio en estrategias puras está garantizado sin necesidad de cuasi-concavidad de las funciones de beneficio; el conjunto de equilibrios, definido por sus elementos extremos, tiene una estructura de orden que permite un análisis global del conjunto; hay un algoritmo para calcular los equilibrios extremos, que también delimita el conjunto racionalizable; además, con supuestos mínimos se obtienen resultados de estática comparativa monótonos.

La finalidad de este artículo es ofrecer una introducción a los juegos supermodulares y proporcionar algunas aplicaciones al análisis en organización industrial. Obtenemos nuevos resultados y aclaramos algunos resultados anteriores deshaciéndonos de supuestos innecesarios. De esta manera, el análisis revela el papel de los supuestos críticos. Además, el rango de aplicación de la teoría se extiende más allá de los juegos con complementariedades estratégicas, proporcionando ejemplos de resultados obtenidos en juegos que exhiben sustituibilidad estratégica. Se advierte al lector de que el enfoque, aunque es útil en un amplio número de casos, no es de aplicación universal.

La organización de este artículo es la siguiente. En la primera sección se presentan los resultados básicos de la teoría y algunos ejemplos. A continuación se desarrollan algunas aplicaciones al oligopolio de precios en entornos de productos homogéneos y diferenciados, así como resultados de estática comparativa. En la tercera sección se amplía la taxonomía de comportamiento estratégico propuesta por Fudenberg y Tirole (1984). El artículo concluye con algunas observaciones finales.

UNA INTRODUCCIÓN A JUEGOS CON COMPLEMENTARIEDADES ESTRATÉGICAS

Esta sección contiene definiciones básicas y algunos de los principales resultados de la teoría de juegos supermodulares. El lector dispone en Vives (2005) de un tratamiento más exhaustivo y general de la teoría, así como pruebas, referencias y aplicaciones adicionales.

La definición de un juego con complementariedades estratégicas se proporciona en un entorno diferenciable. Esto se hace solamente para minimizar el uso de instrumentos matemáticos, pero no es la forma más general de definirlo. Un juego $(A_i, \pi_i; i \in N)$ está definido por un conjunto de jugadores N, $i = 1, \ldots, n$, y por un conjunto de la estrategias A_i y una función de beneficios π_i para cada jugador $i \in N$ (el beneficio está definido sobre el producto vectorial de los espacios de estrategias de los jugadores A). Tomemos $a_i \in A_i$ y denotemos por a_{-i} el perfil de las estrategias $(a_1,..., a_n)$ después de suprimir la coordenada i. Entonces tenemos $a_{-i} \in \Pi_{j \neq i} A_j$. El juego $(A_i, \pi_i; i \in N)$ es *supermodular diferenciable* si cada conjunto A_i es un cubo compacto de un espacio euclídeo y $\pi_i(a_i, a_{-i})$ es dos veces continuamente diferenciable y satisface

(i) $\partial^2 \pi_i / \partial a_{ih} \partial a_{ik} \geq 0$ *para todo* $k \neq h$ y

(ii) $\partial^2 \pi_i / \partial a_{ih} \partial a_{jk} \geq 0$ para todo $j \neq i$ y para todo h y k,

donde a_{ih} es el componente h de la estrategia a_i del jugador i.

La condición (i) es la propiedad de complementariedad estratégica con respecto a la propia estrategia del jugador, a_i. La condición (ii) es la propiedad de complementariedad estratégica con respecto a las estrategias de los rivales, a_{-i}. Esta última propiedad en la formulación general implica que la función de beneficios π_i tenga *diferencias crecientes* en (a_i, a_{-i}): el beneficio marginal de la acción h del jugador i se incrementa en cualquier acción de sus rivales. Estas condiciones garantizan que la mejor respuesta de cada jugador i es monótona creciente incluso cuando π_i no es cuasi-cóncava en a_i.

Para ganar intuición es útil examinar el caso «clásico» de una dimensión, donde las mejores respuestas son funciones continuas. Sea A_i un intervalo compacto. Suponemos que la mejor respuesta del jugador i a a_{-i} es única, interior e igual a $r_i(a_{-i})$. Entonces la derivada $\partial \pi_i / \partial a_i$ es igual a cero en $a = (r_i(a_{-i}), a_{-i})$. Además, si $\partial^2 \pi_i / \partial a_i^2 < 0$, entonces r_i es continuamente diferenciable y $\partial r_i / \partial a_j = -(\partial^2 \pi_i / \partial a_i \partial a_j) / (\partial^2 \pi_i / \partial a_i^2)$, $j \neq i$. Por tanto, *signo* $(\partial r_i / \partial a_j) =$ *signo* $(\partial^2 \pi_i / \partial a_i \partial a_j)$. Incluso si π_i no es cuasi-cóncava, si $\partial^2 \pi_i / \partial a_i \partial a_j > 0$, $j \neq i$, entonces cualquier selección de la correspondencia de respuesta óptima del jugador i, r_i, crece con las acciones de los rivales (aunque puede tener saltos). Resumiendo, la derivada parcial cruzada positiva de los beneficios asegura que cualquier respuesta óptima de la empresa aumenta, aunque pueda tener saltos; y si esto ocurre, los saltos serán hacia arriba, no hacia abajo.

Como ejemplo pensemos en un oligopolio de Bertrand con productos diferenciados sustitutivos imperfectos en el que n empresas producen una variedad diferente. La demanda de la variedad i viene dada por $D_i(p_i, p_{-i})$, donde p_i es el precio de la empresa i y p_{-i} es el vector de precios que fijan las otras empresas. En este caso suponemos que los conjuntos de estrategias son intervalos compactos de precios, y la hipótesis (ii) implica que el beneficio marginal de un incremento del precio de una empresa aumenta con los precios de los rivales (y, de acuerdo con la hipótesis (i), con el resto de precios fijados por la misma empresa, si se trata de una empresa multi-producto). Un sistema de demanda lineal satisfaría estas hipótesis. De forma dual se podría considerar el caso un oligopolio de Cournot con productos complementarios. En este caso los conjuntos estratégicos son intervalos compactos de cantidades.

Decimos que el juego es log-supermodular si π_i es no-negativa y log π_i cumple las condiciones (i) y (ii). Esto nos ofrece una transformación útil que extiende el rango de aplicación de la teoría (porque una transformación monótona de la función de beneficios no cambia el conjunto de equilibrios del juego). En el ejemplo del oligopolio de Bertrand, con costes marginales constantes, c_i para la empresa i, la función de beneficio de la empresa i, $\pi_i = (p_i - c_i) D_i(p_i, p_{-i})$, es log-supermodular en (p_i, p_{-i}) cuando $\partial^2 log D_i / \partial p_i \partial p_j \geq 0$. Esta desigualdad se satisface cuando η_i, la elasticidad precio de demanda de la empresa i, es decreciente en p_{-i}, como en el caso de elasticidad constante, logit, o sistemas de demanda de gastos constantes –véase el Capítulo 6 de Vives (1999)–.

Los siguientes resultados se satisfacen en un juego supermodular.

Resultado 1: Existencia y estructura de orden. En un juego supermodular siempre existen equilibrios extremos. Esto es, en el conjunto de equilibrio hay *un equilibrio mayor* $\bar{a}$ *y un equilibrio menor* $\underline{a}$.

Este resultado se debe a Topkis (1979) y se demuestra mediante el teorema del punto fijo de Tarski (que establece que, bajo las actuales restricciones, una función creciente de un cubo compacto en sí mismo tiene un punto fijo) en la correspondencia de mejor respuesta, la cual es monótona debido a los supuestos de complementariedad estratégica. De hecho, en un juego supermodular cualquier jugador tiene una mejor respuesta más grande y una más pequeña y estas determinan el mayor y el menor equilibrio. Conviene señalar que aquí no se necesitan beneficios cuasi-cóncavos ni conjuntos de estrategias convexos para obtener mejores respuestas con valores convexos, como se requiere al demostrar su existencia cuando se usa el teorema del punto fijo de Kakutani.

En el oligopolio de Bertrand, por ejemplo, cuando el beneficio es supermodular o log-supermodular sí existen equilibrios de precios extremos, y los resultados se pueden extender a las empresas multi-producto con costes convexos. Por lo tanto, tenemos una amplia clase de casos de oligopolio de Bertrand que no adolecen del problema de la no-existencia de equilibrio identificado por Roberts y Sonnenschein (1977). Esto no quiere decir que todos los juegos de Bertrand con diferenciación de productos sean juegos supermodulares. Véanse los ejemplos en Roberts y Sonnenschein (1977), Friedman (1983) y la Sección 6.2 de Vives (1999), incluyendo juegos con costes fijos evitables y el clásico modelo de Hotelling donde las empresas se encuentran cerca unas de otras. En esos casos, en algún momento las mejores respuestas pueden saltar hacia abajo y un equilibrio de precios (en estrategias puras) puede no existir (1).

Resultado 2: Juegos Simétricos. En un juego supermodular simétrico (es decir, intercambiable frente a permutaciones de los jugadores) existe equilibrio simétrico (ya que los equilibrios extremos $\bar{a}$ y $\underline{a}$ son simétricos). Por eso, si hay un único equilibrio simétrico, entonces el equilibrio es único (ya que $\bar{a} = \underline{a}$). Este resultado es muy útil para demostrar unicidad de equilibrio en juegos supermodulares simétricos. Como ejemplo, considérese una versión simétrica de la demanda de elasticidad constante del sistema de oligopolio de Bertrand con costes marginales constantes. Es fácil comprobar que hay un único equilibrio simétrico y que, puesto que el juego es log-supermodular, el equilibrio es único.

Resultado 3: Bienestar. En un juego supermodular, si el beneficio a un jugador crece con las estrategias de los otros jugadores, entonces el mayor equilibrio es el equilibrio Pareto dominante y el menor equilibrioestá Pareto dominado –Milgrom y Roberts (1990), Vives (1990)–. Este resultado simple está en la base del ranking de Pareto del conjunto de equilibrios de muchos juegos con complementariedades estratégicas. Por ejemplo, en el oligopolio supermodular de Bertrand los beneficios asociados con el mayor precio de equilibrio son también los más altos para cada empresa.

Resultado 4: Estabilidad. En un juego supermodular con beneficios continuos, la dinámica de mejor respuesta:

(i) Se aproxima al cubo $[\underline{a}, \bar{a}]$ definido por los equilibrios menor y mayor del juego (que se corresponden con la mayor y menor estrategia iterativamente no dominadas). Por lo tanto, si el equilibrio es único, el juego es resoluble por dominación (*dominance solvable*) y el equilibrio es globalmente estable –Vives (1990), Milgrom y Roberts (1990)–.

(ii) Converge monótonamente hacia abajo a un equilibrio a partir de cualquier punto en la intersección de los conjuntos de contorno formados por las mayores estrategias de las mejores respuestas de los jugadores (A^+ en figura 1). De igual modo, a partir de cualquier punto en la intersección de los conjuntos de contorno formados por las menores estrategias de las mejores respuestas de los jugadores (A^- en figura 1) convergen monótonamente hacia arriba a un equilibrio (Vives, 1990).

Resumiendo, toda la acción estratégica relevante ocurre en el cubo $[\underline{a}, \bar{a}]$ definido por los equilibrios menor y mayor del juego. Los resultados racionalizables del juego deben encontrarse en el cubo $[\underline{a}, \bar{a}]$ Bernheim (1984). Para mostrar el resultado (ii) basta comenzar en cualquier punto en A^+ (véase la figura 1). La dinámica de mejor respuesta define así una secuencia monótona decreciente que converge a un punto que, por la continuidad de beneficios, debe ser un equilibrio. De hecho empezando en el mayor (menor) punto del cubo que define el espacio de acciones A, la dinámica de mejor respuesta con la mayor (menor) mejor respuesta conducirá al mayor (menor) equilibrio – Topkis (1979). Sin embargo, a partir de un punto arbitrario la convergencia no está garantizada debido a que un ciclo es posible. Por ejemplo, en la figura 1, comenzando en a^o $[\underline{a}_1, \bar{a}_2]$ la dinámica de mejor respuesta circula a lo largo de los extremos de la caja $[\underline{a}, \bar{a}]$.

En un oligopolio de Bertrand con demanda lineal, o de elasticidad constante, o logit, el equilibrio es único y, por tanto, el juego es resoluble por dominación y globalmente estable.

Resultado 5: Estática Comparativa. Considere un juego supermodular con beneficios para la empresa $i, \pi_i (a_i, a_{-i}; t)$ parametrizados por t:

Si $\partial^2 \pi_i / \partial a_{ih} \partial t \geq 0$ para toda h e i, entonces con un incremento en t:

(i) los puntos de equilibrio mayor y menor aumentan, y

(ii) partiendo de cualquier equilibrio, la dinámica de la mejor respuesta conduce a un equilibrio (débilmente) mayor debido al cambio del parámetro.

El resultado (ii) puede extenderse a una clase de dinámicas adaptativas, que incluyen las del tipo juego ficticio (*ficticious play*) y dinámicas de gradientes; y selecciones continuas de equilibrio que no crezcan monótonamente con t predicen equilibrios inestables, Echenique (2002).

Un argumento heurístico que explica este resultado es el siguiente. La mayor mejor respuesta de cual-

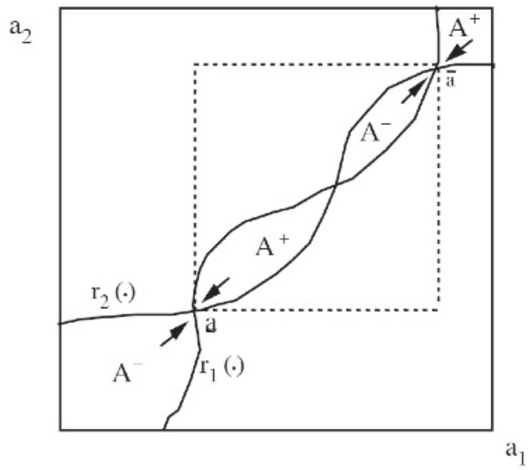

FIGURA 1

TATÔNNEMENT DE COURNOT EN UN JUEGO SUPERMODULAR

(CON FUNCIONES DE MEJOR RESPUESTA r_1 (·), r_2 (·)

FUENTE: Autor, artículo original.

quier jugador es creciente en t y esto implica que el mayor punto de equilibrio también aumenta con t. Un incremento en t deja el anterior equilibrio en A^- y por lo tanto pone en movimiento, vía mejor respuesta (o, más generalmente, vía dinámicas adaptativas), una secuencia de crecimiento monótono que necesariamente converge a un equilibrio mayor. Milgrom y Shanon (1994) y Vives (1999) contienen pruebas detalladas y resultados adicionales.

El Principio de Correspondencia de Samuelson (1947) vincula una estática comparativa no ambigua con la estabilidad del equilibrio y se obtiene mediante métodos de cálculo estándar aplicados a modelos unidimensionales con equilibrios interiores y estables. El resultado de estática comparativa anterior puede ser entendido como una versión multidimensional global de este principio cuando las condiciones de complementariedad se mantienen. Por ejemplo, en un mercado oligopolístico de Bertrand (supermodular o log-supermodular) puede haber múltiples equilibrios, pero no sabemos qué vectores de precios de equilibrio extremo aumentan con un impuesto al consumo t. Esto ocurre porque $\pi_i = (p_i - t - c_i)D_i(p)$ y $\partial^2\pi_i / \partial p_i \partial t = -\partial D_i/\partial p_i > 0$.

Otro ejemplo es la adopción de tecnología. Supóngase que cada una de n empresas puede adoptar una nueva tecnología en cualquier periodo $t = 1,\ldots,T$ (como en Farrell y Saloner, 1985). Cuanto más grande sea el número de adoptantes más beneficioso es para un empresa adoptar el nuevo estándar. Las empresas pueden ser de diferentes tipos en función de su propensión a adoptar el nuevo estándar. Esto es un juego de complementariedades estratégicas con equilibrios múltiples, algunos de los cuales muestran «exceso de inercia», pues las empresas adoptan la nueva tecnología tarde en el juego. Partiendo de un equilibrio inicial, si se reduce el coste de adoptar la nueva tecnología, entonces una dinámica adaptativa conducirá secuencialmente a aumentar los niveles de adopción de la nueva tecnología.

Resultado 6: Duopolio con sustituibilidad estratégica. Para $n=2$ y con complementariedad estratégica en la estrategia propia, $\partial^2\pi_i/\partial a_{ih}\partial a_{jk} \geq 0$ para todo $k \neq h$, y estrategia de sustituibilidad en estrategias rivales, $\partial^2\pi_i/\partial a_{ih}\partial a_{jk} \leq 0$ para todo $j \neq i$ y para todo h y k, podemos transformar el juego de duopolio en un juego (diferenciable) supermodular. De hecho, si redefinimos las estrategias de manera que $s_1 = a_1$ y $s_2 = -a_2$, el juego es supermodular –observe que la figura 2 muestra la imagen de espejo de la Figura 1– con respecto al eje de ordenadas. Podemos concluir, por tanto, que todos los resultados obtenidos en 1-5 aplican a este juego de oligopolio. Sin embargo, la extensión al caso de sustituibilidad estratégica para $n > 2$ jugadores no se mantiene porque este artificio no funciona, Vives (1990).

La interpretación del resultado sobre el bienestar es la siguiente. Si para algunos jugadores los beneficios son crecientes en las estrategias de los rivales y para algunos otros son decrecientes, entonces el mayor equilibrio es mejor para los primeros y peor para los segundos. Este es el caso en un duopolio de Cournot con sustituibilidad estratégica con la estrategia de transformación que da lugar a un juego supermodular. De hecho, el equilibrio preferido para la empresa 1 es aquel en el que su producción es más grande y la producción de la empresa 2 menor (véase la figura 2).

Observación 1. El resultado 5 sobre comparativa estática se cumple también si el parámetro t afecta solo al resultado de una empresa. Formulémoslo en el caso de duopolio con acciones de empresas en un intervalo compacto. Consideremos un juego de duopolio supermodular en el que el beneficio para el jugador 1, parametrizado por t, es $\pi_1(a_1, a_2; t)$, y para el jugador 2 es $\pi_2(a_1, a_2)$. Si $\partial^2\pi_1/\partial a_1 \partial t \geq 0$, entonces los equilibrios extremos crecen con t. Observe que si el juego es de sustituibilidad estratégica, entonces las estrategias de equilibrio extremo de duopolio para la empresa 1 (2) son crecientes (decrecientes) en t si

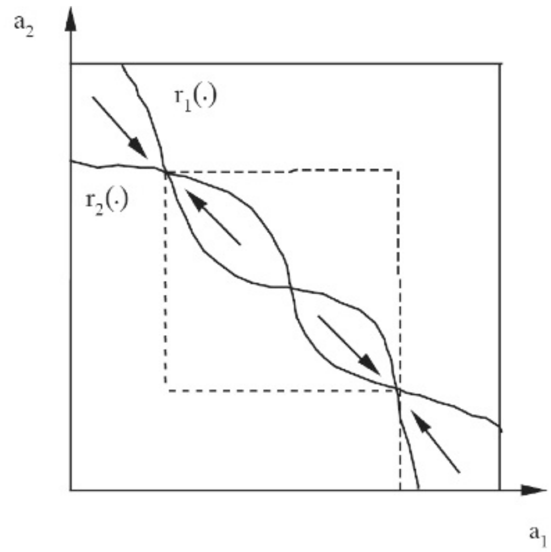

FIGURA 2

UN JUEGO DE DUOPOLIO CON MEJORES RESPUESTAS DECRECIENTES

FUENTE: Autor, artículo original.

$\partial^2\pi_1/\partial a_1\partial t \geq 0$. Los resultados se revierten si $\partial^2\pi_1/\partial a_1\partial t < 0$, véase Vives (1999). En un juego con sustituibilidad estratégica se pueden obtener resultados de estática comparativa para *n* empresas siempre que los beneficios de las empresas sean simétricos (es decir, si las empresas no se preocupan por la identidad de los oponentes, sino solo acerca de sus acciones y los parámetros relevantes) y que $-\partial^2\pi_i/\partial a_i^2 > |\partial^2\pi_i/\partial a_i\partial a_j|$ para todo $i \neq j$. Véase Athey y Schmetzler (2001).

OLIGOPOLIO

Aquí presento algunas aplicaciones a precios de oligopolio: competencia con productos diferenciados y estática comparativa en mercados de Cournot. Veremos que el enfoque garantiza la existencia de equilibrio, permite comparar los equilibrios alternativos y rinde resultados de estática comparativa con supuestos mínimos.

Comparación de Equilibrios de Bertrand y de Cournot. Considérese un mercado como el descrito anteriormente en el ejemplo del oligopolio de Bertrand, en el que *n* empresas compiten en productos diferenciados y cada empresa produce una variedad diferente. Como antes, la demanda de la variedad *i* es $D_i(p_i, p_{-i})$. En el juego de Bertrand las empresas compiten en precios y en el de Cournot en cantidades (para definir los beneficios se usan las funciones de demanda inversa). Los equilibrios de Bertrand son típicamente considerados más competitivos que los de Cournot. El enfoque de la teoría de retículos permite precisar en qué sentido esto es verdad y qué factores conducen a este resultado.

Se puede demostrar que con bienes sustitutivos (o complementarios) brutos, si el juego de precios es supermodular y cuasi-cóncavo (esto es, π_i es cuasi-cóncava para todo *i*), entonces en cualquier equilibrio de Cournot interior los precios son mayores que el menor precio de equilibrio de Bertrand. El resultado dual también se satisface. Con bienes sustitutivos (o complementarios) brutos, si el juego de cantidades es supermodular y cuasi-cóncavo, entonces en cualquier equilibrio de Bertrand interior las empresas producen más que en el menor vector de cantidades de equilibrio de Cournot (Vives, 1985b, 1990).

Para demostrar estos resultados, obsérvese en primer lugar que los precios de Cournot p^C deben estar contenidos en la región A^+ de la figura 1, esto es, la región en el espacio de precios definida por la intersección de los conjuntos de contorno superior de las mejores respuestas de las empresas en el juego de Bertrand. Esto se debe a que la elasticidad de la demanda percibida por una empresa es mayor con competencia en precios que con competencia en cantidades y, por consiguiente, a los niveles de precios de Cournot las empresas tendrían incentivos a reducir sus precios si compitieran en precios. En efecto, con competencia vía cantidades no puede sustraerse mercado a los competidores dadas sus estrategias. Aplicando el Resultado 4(ii) al juego de precios, se concluye que comenzando en cualquier vector de precios de Cournot la dinámica de mejor respuesta lleva al sistema al equilibrio de Bertrand con menores precios. Un corolario es que comenzando en cualquier equilibrio interior de Cournot, si las empresas compitieran en precios, entonces reducirían los precios hasta que el mercado se estabilice en un equilibrio de Bertrand.

Estática Comparativa en Mercados de Cournot. Considere un mercado de Cournot en el que la función de beneficios de la empresa *i* es $\pi_i = P(Q)q_i - C_i(q_i)$, en donde *P* es la función inversa de demanda, *Q* es el producto total, C_i es la función de costes de la empresa y q_i es su nivel de producción.

El enfoque estándar (Dixit, 1986) supone cuasi-concavidad de los beneficios, mejores respuestas decrecientes y que el equilibrio analizado es único y estable, y deriva resultados de estática comparativa. ¿Son estas fuertes hipótesis necesarias? ¿Qué podemos decir si los beneficios no son cuasi-concavos y/o hay múltiples equilibrios?

Revisemos primero el enfoque estándar. Sean P y C_i diferenciables y tales que $P' < 0$, $P'+q_iP'' \leq 0$ (lo que implica que el juego es de sustituibilidad estratégica), y $C_i'' - P' > 0$ para todo i. Estas condiciones garantizan unicidad y estabilidad local (con respecto a la dinámica de mejor respuesta continua). Parametricemos la función de costes de la empresa i mediante θ_i y sea $C_i(q_i, \theta_i)$ tal que $\partial C_i/\partial\theta_i > 0$ y $\partial^2 C_i/\partial\theta_i\partial q_i > 0$. Entonces se puede demostrar, usando cálculo estándar con el teorema de la función implícita, que un incremento de θ_i reduce q_i y π_i, e incrementa q_j y π_j, $j \neq i$.

El enfoque de la teoría de retículos –Amir (1996), Vives (1999)– requiere hipótesis mínimas para obtener el mismo tipo de resultados. Consideremos dos casos: el caso general de oligopolio (posiblemente asimétrico) y el caso simétrico.

En el caso general, consideraré el duopolio de Cournot, en el que las estrategias son sustitutos estratégicos y pueden darse equilibrios múltiples. Una condición suficiente para que las mejores respuestas sean decrecientes es que la función inversa de demanda sea log-cóncava (y los costes de ambas empresas sean crecientes en cantidades producidas) (2). Observe que el juego de sustitutos estratégicos se transforma en un juego de complementarios estratégicos cambiando el signo del espacio de estrategias de un jugador. Sabemos que un equilibrio extremo existe (resultado 6) y que un incremento del parámetro θ_i reduce q_i e incrementa q_j. Los resultados para los beneficios siguen inmediatamente de las desigualdades $\partial C_i/\partial\theta_i > 0$ y $\partial\pi_i/\partial q_j < 0$, $j \neq i$. ¿Y si no estamos en un equilibrio extremo? De manera similar al Resultado 5(ii), la dinámica de la mejor respuesta conduce a resultados de estática comparativa que se derivan de un incremento del parámetro θ_i en cualquier equilibrio.

Restrinjamos atención ahora a un oligopolio de Cournot simétrico: $C_i = C$, $i = 1, \ldots, n$. En el enfoque estándar (Seade, 1980a,b) se supone que los beneficios son cuasi-cóncavos y se imponen las condiciones $(n+1)P'(nq) + nP''(nq)q < 0$ y $C''(q) - P'(nq) > 0$, de forma que el equilibrio es único, simétrico y localmente estable, q^*. Supongamos que $\partial^2 C_i/\partial\theta\,\partial q_i \leq 0$. Las técnicas de cálculo estándar demuestran que un incremento de θ incrementa q^*, que la cantidad total se incrementa y que el beneficio por empresa se reduce cuando el número de empresas n se incrementa. Los resultados de estática comparativa del producto de cada empresa respecto a ν es ambiguo. El enfoque clásico tiene varios problemas. En primer lugar, no menciona la posible existencia de múltiples equilibrios. En segundo lugar, es restrictivo y puede ser equívoco. Por ejemplo, si la condición de unicidad para equilibrios simétricos no se cumple y hay múltiples equilibrios simétricos, entonces un cambio en n puede hacer que el equilibrio bajo consideración desaparezca y puede introducir nuevos equilibrios.

En el enfoque de la teoría de retículos (Amir y Lambson, 2000; Vives, 1999), se asume solo que $P' < 0$ y $C'' - P' > 0$. Como se demostrará más abajo, existe un equilibrio simétrico (y no existen equilibrios asimétricos). Bajo la hipótesis $\partial^2 C/\partial\theta\partial q_i \leq 0$, en un equilibrio de Cournot (simétrico) extremo el *output* de cada empresa crece con θ, el *output* total crece con n y el beneficio de cada empresa decrece con n. Además, el *output* de cada empresa decrece (crece) con n si la demanda es log-cóncava (log-convexa y los costes son cero). Este enfoque prescinde de todas la hipótesis innecesarias del enfoque estándar y permite obtener nuevos resultados.

Para ilustrar el enfoque, esquematicemos la demostración de que, bajo la hipótesis $P' < 0$ y $C'' - P' > 0$, existe un equilibrio de Cournot simétrico (y no existen equilibrios asimétricos); que el *output* de cada empresa es creciente en θ y que el *output* total es creciente en n. Sea ψ_i la correspondencia de mejor respuesta de la empresa i (que es la misma para todas la empresas debido a la simetría). Definamos la correspondencia φ que asigna $(q_i + Q_{-i})(n-1)/n$, donde $q_i \in \psi_i(Q_{-i})$, a Q_{-i}. Los equilibrios simétricos son puntos fijos de esta correspondencia. Con estas hipótesis se puede comprobar que ψ_i tiene una pendiente mayor que -1 (3). Esto implica que todas la selecciones de $\psi_i(Q_{-i}) + Q_{-i}$ son (estrictamente) crecientes y que no existe ningún equilibrio asimétrico (4). Además, todas las selecciones de la correspondencia φ son crecientes. Podemos usar el teorema de punto fijo de Tarski para demostrar la existencia de un equilibrio extremo. Estos equilibrios se pueden encontrar usando las selecciones extremas de φ (que están bien definidas en nuestro contexto). Similarmente al Resultado 5(i), los niveles de producción de las empresas en estos equilibrios extremos son crecientes en θ porque, a consecuencia de la hipótesis $\partial^2 C/\partial\theta\partial q_i \leq 0$, las selecciones extremas de la correspondencia φ (y de ψ_i) son crecientes en θ. Veamos que el producto total es creciente en n para cualquier equilibrio extremo. En primer lugar, es fácil ver que las selecciones extremas de φ son crecientes en n. Esto significa que el *output* total de n-1 empresas debe ser creciente en n en cualquier equilibrio extremo. Se sigue que el *output* total en un equilibrio extremo debe ser creciente en n porque todas las selecciones de $\psi_i(Q_{-i}) + Q_{-i}$ son (estrictamente) crecientes en Q_{-i}. Los resultados para beneficios y niveles de producción individuales en relación con n se obtienen mediante argumentos similares (5).

TAXONOMÍA DE LA CONDUCTA ESTRATÉGICA

Fudenberg y Tirole (1984) proporcionan una taxonomía de la conducta estratégica en un contexto sencillo de un juego de dos etapas entre una empresa

CUADRO 1
TAXONOMÍA DE LA CONDUCTA ESTRATÉGICA

	Inversión hace dura a la empresa 1	Inversión hace blanda a la empresa 1
Sustituibilidad estratégica	Sobre-inversión (Perro Dominante)	Infra-inversión (Delgado y Hambriento)
Complementariedad estratégica	Infra-inversión (Perro Faldero)	Sobre-inversión (Gato Gordo)

FUENTE: Autor, artículo original.

establecida y una entrante. En la primera etapa la empresa establecida (empresa 1) puede hacer una inversión k (observable por la empresa entrante) que genera unos beneficios de $\pi_1(x_1, x_2;k)$ en la etapa de mercado, donde x_i es la acción de la empresa i. El beneficio de la empresa entrante es $\pi_2\ (x_1,x_2)$. La clave es que la empresa establecida puede influir a su favor sobre el resultado de mercado (en la segunda etapa) mediante una inversión *ex ante* (en la primera etapa). La empresa 1 hace esto teniendo en cuenta el efecto de su inversión sobre la conducta de equilibrio de su rival en la etapa de mercado. El objetivo es poner signo al efecto estratégico tomando como referencia la conducta «inocente» que supondría que la empresa establecida decide el nivel de inversión k teniendo en cuenta únicamente el efecto directo de esta inversión sobre sus beneficios.

El enfoque estándar supone que en la segunda etapa las funciones de mejor respuesta de ambas empresas están bien definidas y que hay un único y (localmente) estable equilibrio de Nash que depende de manera diferenciable de k, $x^*(k)$. Para obtener estas propiedades se supone que $-\partial^2\pi_i/\partial x_i^2 > |\partial^2\pi_i/\partial x_i \partial x_j|$, $i \neq j$, $i=1,2$. En un equilibrio perfecto en subjuegos tendremos $\partial\pi_1/\partial k+S = 0$, donde $S = \partial\pi_1/\partial x_2(\partial x_2^*/\partial k)$ es el efecto estratégico. Esto es, el efecto de la inversión k sobre los beneficios de la empresa establecida debido a que esta inversión modifica la conducta de mercado de la empresa entrante. Con los supuestos que mantenemos se sigue, utilizando técnicas de cálculo estándar, que $signo(\partial x^*_2/\partial k)= signo\ [(\partial^2\pi_2/\partial x_1\partial x_2)(\partial^2\pi_1/\partial k\partial x_1)]$ y, por tanto, $signo(S) = signo\ [(\partial\pi_1/\partial x_2)(\partial^2\pi_1/\partial k\partial x_1)(\partial^2\pi_2/\partial x_1\partial x_2)]$. Si $(\partial\pi_1/\partial x_2)(\partial^2\pi_1/\partial k\partial x_1) < 0\ (>0)$, decimos que la inversión hace a la empresa 1 dura (blanda). En efecto, supongamos que $\partial\pi_i/\partial x_j < 0$, $i \neq j$, de manera que un aumento de la acción de mercado de la empresa j perjudica a la empresa i. Entonces, si $\partial^2\pi_1/\partial k\,\partial x_1 > 0$, un incremento de k modifica la mejor respuesta de la empresa 1 hacia fuera, lo que supone un movimiento agresivo y hace a la empresa dura.

Se puede proporcionar una taxonomía de la conducta estratégica (véase el cuadro 1): dependiendo de si la competencia es de complementariedad estratégica ($\partial^2\pi_2/\partial x_1\partial x_2 > 0$) o sustituibilidad estratégica ($\partial^2\pi_2/\partial x_1\partial x_2 < 0$) y si la inversión hace a la empresa 1 dura ($(\partial\pi_1/\partial x_2)(\partial^2\pi_1/\partial k\partial x_1) < 0$) o blanda ($(\partial\pi_1/\partial x_2)(\partial^2\pi_1/\partial k\,\partial x_1) > 0$). Si la competencia es del tipo sustituibilidad estratégica y la inversión hace dura a la empresa 1, entonces la empresa establecida sobreinvierte ($S > 0$) para desplazar hacia abajo la mejor respuesta de la empresa entrante (véase la figura 3, en la página siguiente). Esta es la estrategia del *perro dominante* (*top dog*). Competencia *à la* Cournot e inversión en reducción del coste de producción sería un ejemplo. Si la competencia es del tipo complementariedad estratégica y la inversión hace dura a la empresa 1, entonces la empresa establecida infra-invierte ($S < 0$) para desplazar hacia arriba la mejor respuesta de la empresa entrante. Esta es la estrategia del *perro faldero* (*puppy dog*). Competencia en precios con productos diferenciados e inversión en reducción del coste de producción sería un ejemplo. Similarmente pueden definirse las estrategias *delgado y hambriento* (*lean and hungry*) y *gato gordo* (*fat cat*).

En la versión de estos resultados de la teoría de retículos –Sección 7.4.3 en Vives (1999)– la taxonomía se obtiene a partir de supuestos mínimos (el carácter de la competencia y de la inversión) sobre los equilibrios extremos. No hay necesidad de las fuertes restricciones impuestas previamente para obtener un equilibrio único y estable en la etapa de mercado. En efecto, a partir del la Observación 1, si el juego de mercado es supermodular ($\partial^2\pi_2/\partial x_1\partial x_2 \geq 0$) y $\partial^2\pi_1/\partial k\,\partial x_1 \geq 0$ ($\partial^2\pi_1/\partial k\,\partial x_1 \leq 0$), entonces los equilibrios extremos son crecientes (decrecientes) en k. Si el juego de mercado es de sustituibilidad estratégica ($\partial^2\pi_2/\partial x_1\partial x_2 \leq 0$), entonces cambiado el signo al espacio de estrategias de un jugador el juego se convierte en supermodular y las estrategias de equilibrio del jugador 1 (2) en los equilibrios extremos son crecientes (decrecientes) en k siempre que $\partial^2\pi_1/\partial k\,\partial x_1 \geq 0$, y el resultado es el opuesto si $\partial^2\pi_1/\partial k\,\partial x_1 \leq 0$. Por tanto, cuando x_2^* es un equilibrio extremo tenemos que $signo(\partial x_2^*/\partial k) = signo[(\partial^2\pi_2/\partial x_1\,\partial x_2)(\partial^2\pi_1/\partial k\,\partial x1)]$, y se obtiene la taxonomía descrita para los equilibrios extremos.

¿Qué pasaría si en la etapa de mercado las empresas se sitúan en un equilibrio no extremo (por ejemplo en el equilibrio inestable de la figura 3)? Entonces, si la dinámica fuera del equilibrio está gobernada por la dinámica de mejor respuesta, entonces el signo del impacto del cambio en k el mismo que en un equilibrio extremo. En la figura 3, que describe el caso de competencia con sustituibilidad estratégica e inversión que hace dura a la empresa establecida, un incremento de k generará un proceso de ajuste que conduciría a un nuevo equilibrio $\tilde{x}$ tal que $u_2 > \tilde{x}_2$.

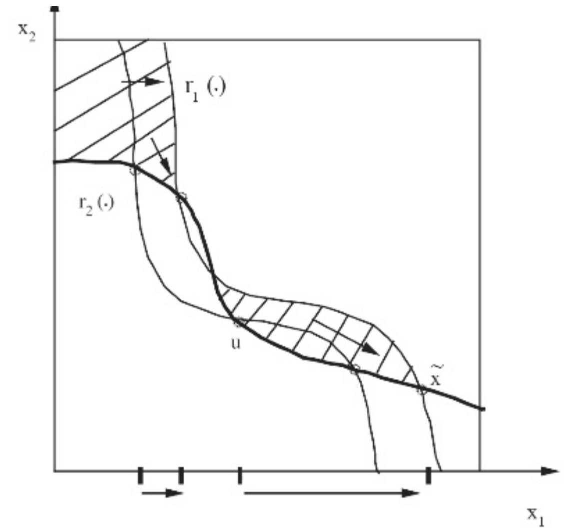

FIGURA 3

EFECTO DE UN INCREMENTO *K* EN UN EQUILIBRIO INESTABLE $u \longrightarrow \tilde{x}$

FUENTE: Autor, artículo original.

En resumen, la taxonomía de conducta estratégica puede obtenerse simplemente con los supuestos cruciales sobre monotonicidad de los beneficios marginales, sin ninguna necesidad de cuasi-concavidad de los beneficios, ni requisito de que el equilibrio de mercado sea único y estable. El método se puede extender para estudiar en qué situaciones los líderes o los seguidores de una industria tienen más incentivos a invertir, ya sea en reducción de costes o en mejorar de la calidad de sus productos, e investigar si esta inversión conduce a un incremento o a una reducción de la dominancia. Véase Athey y Schmutzler (2001).

OBSERVACIONES FINALES

En este artículo he repasado brevemente la teoría de los juegos supermodulares y algunas aplicaciones a la organización industrial. Este repaso no ha sido de ninguna manera exhaustivo. Por ejemplo, los únicos juegos dinámicos que han sido considerados se circunscriben al formato simple de juegos de dos etapas en el tercer apartado. Sin embargo, las técnicas de la teoría de retículos permiten un análisis muy general de los juegos dinámicos. Por ejemplo, Jun y Vives (2004) y Sleet (2001) analizan juegos diferenciales, y Hoppe y Lehmann-Grube (2002) desarrollan aplicaciones a juegos de introducción de innovaciones. Cabral y Villas-Boas (2002) consideran aplicaciones a oligopolios multimercado y Anderson y Schmitt (2003) a juegos de cuotas en el comercio internacional. Fallos de coordinación en macroeconomía y en mercados financieros así como procesos acumulativos en presencia de complementariedades y competición monopolística proveen más ejemplos fuera del dominio de la Organización Industrial (6). Los Juegos Bayesianos proveen otro campo fértil para aplicaciones del método, avanzando hacia la frontera de teoría de subastas, juegos globales y selección de equilibrios. Véase Vives (2005) sobre alguna de las extensiones mencionadas. Finalmente, trabajo reciente ha contrastado las complementariedades en innovación y en diseño organizativo usando las herramientas presentadas en este artículo (7).

(*) Este artículo es una traducción de «Games with strategic complementarities: New applications to industrial organization», publicado en el International Journal of Industrial Organization en 2005, volumen 23, págs. 625-637.

NOTAS

[1] Véase, sin embargo, el juego modificado de Hotelling en Thisse y Vives (1992), en el que las mejores respuestas pueden ser discontinuas pero son crecientes.

[2] Mejores respuestas decrecientes implican, de hecho, la existencia de un equilibrio de Cournot en un juego de *n* empresas –véase el Teorema 2.7 en Vives (1999). Mejores respuestas decrecientes son consideradas el caso normal en competencia a la Cournot, pero es fácil generar ejemplos con mejores respuestas crecientes o no-monótonas. Para una discusión sobre este asunto, véase la sección 4.1 en Vives (1999).

[3] Esto es, un segmento que une cualesquiera dos puntos en la gráfica de la correspondencia ψ tiene una pendiente mayor que –1.

[4] Esto es así porque cualquiera que sea el *output* total hay un único *output* para cada empresa, el mismo para todas las empresas por simetría, consistente con una conducta optimizadora (véase la observación 17 en la Sección 2.3 en Vives (1999).

[5] Los detalles pueden encontrase en en las páginas 42-43, 93-96 y en la Sección 4.3.1 de Vives (1999).

[6] Véase Cooper y John (1988), Diamond y Dybvig (1983) y Matsuyama (1995).

[7] Véase Athey y Stern (1998), Miravete y Pernias (2000) y Mohnen y Roeller (2000).

REFERENCIAS

AMIR, R. (1996): «Cournot oligopoly and the theory of supermodular games. *Games and Economic Behavior»*, nº 15, pp.132-148.

AMIR, R. y LAMBSON, V.E. (2000): «On the effects of entry in Cournot markets». *Review of Economic Studies,* vol. 67, nº 2, pp. 235-254.

ANDERSON, S. y SCHMITT, N. (2003): «Non-tariff barriers and trade liberalization». *Economic Inquiry, Economic Inquiry,* vol. 41, nº 1, pp. 80- 97.

ATHEY, S. y SCHMUTZLER, A. (2001): «Investment and market dominance». *Rand Journal of Economics* vol. 32, nº 1, pp. 1-26.

ATHEY, S. y STERN, S. (1998). «An Empirical Framework for Testing Theories About Complementarity in Organizational Design». *NBER Working Paper,* nº w6600.

BERNHEIM, D. (1984). «Rationalizable strategic behavior». *Econometrica,* vol. 52, nº 4, pp. 1007-1028.

CABRAL, L. y VILLAS-BOAS, M. (2002). Bertrand Supertraps, mimeo.

COOPER, R. y JOHN, A. (1988). «Coordinating coordination failures in keynesian models». *Quarterly Journal of Economics*, nº 103, pp. 441–463.

DIAMOND, D. y DYBVIG, P. (1983):. «Bank runs, deposit insurance and liquidity». *Journal of Political Economy,* vol. 91, nº 3, pp. 401-419.

DIXIT, A. (1986). «Comparative statics for oligopoly». *International Economic Review* nº 27, pp. 107-122.

ECHENIQUE, F. (2002): «Comparative statics by adaptive dynamics and the correspondence principle». *Econometrica,* vol. 70, nº 2, pp. 833-844.

FARRELL, J. y SALONER, G. (1985): «Standardization, compatibility and innovation». *Rand Journal of Economics,* vol. 16, nº 1, pp. 70-83.

FRIEDMAN, J. (1983): «Oligopoly Theory». Cambridge University Press, Cambridge. Fudenberg, D., Tirole, J. 1984. The fat cat effect, the puppy dog ploy and the lean and hungry look. *American Economic Review, Papers and Proceedings,* nº 74, pp. 361-368.

HOPPE, H. y LEHMANN-GRUBE, U. (2004): *Innovation Timing Games: A General Framework with Applications*. mimeo, University of Hamburg.

JUN, B. y VIVES, X. (2004): «Strategic incentives in Dynamic Duopoly». *Journal of Economic Theory*, vol. 116, nº 2, pp. 249-281.

MATSUYAMA, K. (1995). «Complementarities and cumulative processes in models of monopolistic competition». *Journal of Economic Literature,* vo. 33, nº 2, pp. 701-729.

MILGROM, P. y ROBERTS, J. (1990): «Rationalizability, learning and equilibrium in games with strategic complementarities». *Econometrica*, nº 58, p. 1255-1277.

MILGROM, P. y SHANON, C. (1994): «Monotone comparative statics». *Econometrica,* nº62, pp. 157-180.

MIRAVETE, E. y PERNIAS, J. (2000). *Innovation Complementarities and Scale of Production*, mimeo, University of Pennsylvania.

MOHNEN, P. y ROELLER, L. (2000). *Complementarities in Innovation Policy*. mimeo. Humboldt University.

ROBERTS, J. y SONNENSCHEIN, H. (1977): «On the foundations of the theory of monopolistic competition». *Econometrica*, vol. 45, nº 1, pp. 101-113.

SAMUELSON, P.A. (1947): *Foundations of Economic Analysis*. Harvard University Press, Cambridge.

SEADE, J. (1980a): «The stability of Cournot revisited». *Journal of Economic Theory, nº* 23, pp. 15–27.

SEADE, J. (1980b): «On the effects of entry». *Econometrica, nº* 48, pp. 479-489.

SLEET, C. (2001): «Markov perfect equilibria in industries with complementarities». *Economic Theory,* vol. 17. nº 2, pp. 371-397.

THISSE, J y VIVES, X. (1992): «Basing point pricing: competition versus collusion». *Journal of Industrial Economics*, nº 40, pp. 249-260.

TOPKIS, D. (1979): «Equilibrium point in nonzero-sum n-person submodular games». *SIAM Journal on Control and Optimization,* nº 17, pp. 773-787.

VIVES, X. (1985a): «Nash Equilibrium in Oligopoly Games with Monotone Best Responses». CARESS W.P. #85-10, University of Pennsylvania.

VIVES, X. (1985b): «On the efficiency of Bertrand and Cournot equilibria with product differentiation». *Journal of Economic Theory,* vol. 36, nº 1, pp. 166-175.

VIVES, X. (1990): «Nash equilibrium with strategic complementarities». *Journal of Mathematical Economics,* vol. 19, nº 3, pp. 305-321.

VIVES, X. (1999): *Oligopoly Pricing*. MIT Press, Cambridge, MA.

VIVES, X. (2005): «Complementarities and games: new developments». *Journal of Economic Literature*, nº 43. pp. 437-479.